

基于分形的从明暗恢复形状算法研究

赵歆波¹⁾ 张定华¹⁾ M. Petrou²⁾ 赵荣椿³⁾

¹⁾(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072)

²⁾(School of Electronic Engineering, IT and Mathematics, University of Surrey, UK)

³⁾(西北工业大学计算机科学与工程系, 西安 710072)

摘要 从明暗恢复形状是计算机视觉领域中的经典病态问题,传统方法是通过引入光滑约束等条件来获得问题的解,但传统方法存在因过平滑而失真的缺点.针对传统方法恢复结果的局限性,提出了一种基于分形约束的从明暗恢复形状的新算法,该方法首先给出分形约束条件,之后结合反射图线性化与最小能量法来计算出曲面高度.该方法不仅克服了传统算法因基于光滑假设所造成的恢复结果过分平滑而失真的缺点,且不需要可积性的约束条件,也不需要边界条件的假设,实验结果表明,该方法用于自然景物的三维表面重构,可获得比传统方法更好的恢复效果.

关键词 自然景物图象 从明暗恢复形状 分形 有限元

中图法分类号: TP391.4 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2002)05-0440-05

A Method of Shape from Shading Based on Fractal Constraint

ZHAO Xin-bo¹⁾, ZHANG Ding-hua¹⁾, M. Petrou²⁾, ZHAO Rong-chun³⁾

¹⁾(Laboratory of Modern Design and Integrated Manufacturing Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

²⁾(School of Electronic Engineering, IT and Mathematics, University of Surrey, UK)

³⁾(Department of Computer Science and Engineering Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract SFS(Shape from Shading) is one of the class ill-posed problems of Computer Vision. General SFS algorithm often involved some additional constraints, such as smoothness constraint, to find a unique solution. However, this is based on the assumption that the reconstructed surface is continuous. Concerning the disadvantage of tradition shape from shading algorithm, a new algorithm of shape from shading based on fractal constraint is proposed in this paper. The method first introduces a novel fractal constraint, then through formulating the SFS problem using techniques of linearization of the reflectance map and minimization of an energy function calculates the surface height. The proposed method overcome the disadvantage of tradition shape from shading algorithm, that is, distortion of recovered result of the 3D surface causing from assumed smoothness constraint, and does not require any integrability constraint or artificial assumption on boundary conditions. Experimental results show that new method is better than tradition method in aspect of 3D surface reconstruction for natural scenery.

Keywords Natural surfaces image, Shape from shading, Fractal, Finite element

0 引言

形状恢复是计算机视觉领域中的经典问题,它是一种利用物体一幅或多幅 2D 灰度图象来获得该

物体 3D 形状信息的技术.通常,3D 信息可由高度 $z(x, y)$, 曲面法矢 (n_x, n_y, n_z) , 曲面梯度 (p, q) , 曲面倾角 σ 以及曲面仰角 τ 描述.从明暗恢复形状(Shape from Shading, 简称 SFS)的方法主要是使用图象灰度(明暗)变化来恢复物体形状的信息.

Horn 最早研究了这个问题^[1,2], 之后, SFS 成为计算机视觉领域的热门研究方向. 大家知道, 原则上从一幅单目图象不能获得景物三维信息, 即 SFS 是一个病态(ill-posed)的逆向问题, 然而, 如果知道关于景物的某些条件或成像几何模型及表面特性等, 则根据同一位置拍摄的单目图象就有可能获得三维表面方向信息, 并由此导出物体的形状. 也就是说, 要获得 SFS 问题的唯一解, 通常需要额外的约束条件^[3].

传统的从明暗恢复形状的方法, 通常以假设物体表面是光滑的为前提, 故提出了光滑性以及可积性等约束, 这种假设虽对人造物体是适合的, 但光滑性约束不适合描述实际自然景物. 大量研究表明, 由于自然景物图象及其相应的物体表面均具有分形特性^[4], 因此, 可根据自然景物的这一特点将分形作为先验模型应用于自然景物的表面恢复应该是一种合理的方法, 本文将就此问题展开研究.

2 SFS 算法的关键技术

通常, SFS 算法是首先构造一个能量函数, 再根据先验知识引入合适的约束条件来寻找使能量函数最小化的 Euler 方程, 然后用变分方法(variational approach)来离散 Euler 方程, 最后通过设计计算离散 Euler 方程的迭代过程来获得使能量函数最小化的解, 该解就是 SFS 问题的一个最佳实现. 这种 SFS 算法一般用曲面梯度 $(p, q) = \left| \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right|$ 来描述物体的表面方向信息.

大家知道, 变分方法一方面会导出复杂的一阶非线性偏微分方程, 另一方面, 计算时, 要求给出合适的初始边界条件, 否则难以得到精确解. 但是, 如果用高度 $z(x, y)$ 来描述物体的表面信息, 那么采用将反射图线性化的方法来计算 SFS 问题, 就可避免上述缺点. 为此, 本文将有限元模型引入 SFS 算法中.

2.1 有限元模型

依据有限元原理, 一个曲面可以被一组小三角面片逼近, 并可由节点基函数的线性组合表示. 图 1 描述的是正方形域 Ω 的一个划分, 其间距是 h .

这里, 域 Ω 被分成一组互不相交的三角面片 T_i

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq M_n} T_i$$

其中, M_n 是三角面片的数目. 推而广之, 令 B_h 表示定义在域 Ω 上的连续性曲面片集. 定义节点基函数

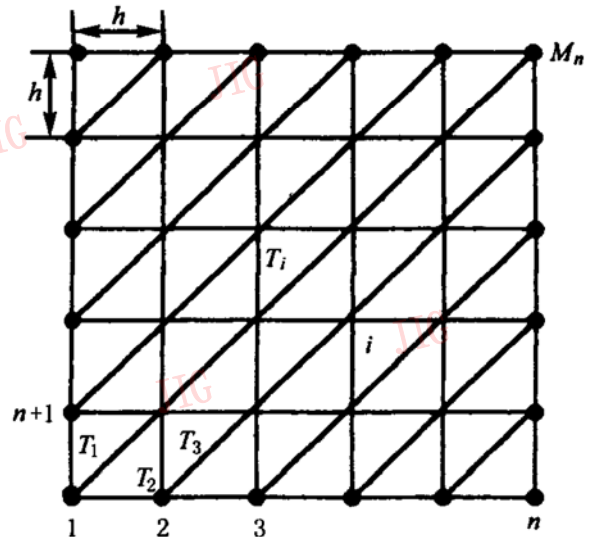


图 1 正方形域 Ω 的网格划分

$\varphi_i \in B_h$ 为其在第 i 个节点处取单位值, 在其他节点处值为零. 显然, 对任意对应于坐标点 (x, y) 处的曲面高度 $z \in B_h$ 均可表示为如下点基函数的线性组合

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^{M_n} z_i \varphi_i(x, y)$$

其中, z_i 是 $z(x, y)$ 在第 i 个节点处的值, M_n 是节点基函数的数目.

于是, 曲面 $z(x, y)$ 的梯度 (p, q) 可由下式计算

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{M_n} z_i \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} \\ q(x, y) &= \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{M_n} z_i \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 反射图象与亮度约束

如果假设物体表面具有 Lambertian 反射特性, 即由一个无限远处的点光源照明, 其投影是正交投影, 那么物体表面上给定一点的辐照度或亮度 E 就主要和该点的表面方向 (p, q) 有关. 这种关系可由图象辐照方程描述

$$E(x, y) = R(p, q) \quad (2)$$

其中, $R(p, q)$ 被称为反射图方程, 定义如下

$$\begin{aligned} R(p, q) &= \rho \frac{p_0 p + q_0 q + 1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ &= \rho \frac{\cos \sigma + p \cos \tau \sin \sigma + q \sin \tau \sin \sigma}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, ρ 为曲面的反射率, $p_0 \equiv -\frac{\cos \tau \sin \sigma}{\cos \sigma}$, $q_0 \equiv -\frac{\sin \tau \sin \sigma}{\cos \sigma}$, τ 是仰角(tilt), σ 是倾斜角.

显然, 反射图方程是一个非线性方程, 为了消除非线性, 可采用它的一阶泰勒展开的形式:

$$R(p, q) \approx R(p_0, q_0) + (p - p_0) \left. \frac{\partial R(p, q)}{\partial p} \right|_{(p_0, q_0)} + (q - q_0) \left. \frac{\partial R(p, q)}{\partial q} \right|_{(p_0, q_0)}$$

其中, 参考点 (p_0, q_0) 既可以是固定点, 也可以是变动点.

将式(1)代入式(3), 就可以得到

$$R(p, q) \approx \alpha p + \beta q + \gamma = \sum_{i=1}^{M_n} \Phi z_i + \gamma \quad (4)$$

其中,

$$\Phi(x, y) = \alpha \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial R(x, y)}{\partial y}$$

$$\gamma = R(p_0, q_0) - \alpha p_0 - \beta q_0$$

其中,

$$\alpha = \left. \frac{\partial R(p, q)}{\partial p} \right|_{(p_0, q_0)}, \quad \beta = \left. \frac{\partial R(p, q)}{\partial q} \right|_{(p_0, q_0)}$$

为计算方便, 将式(2)写成如下误差和的形式

$$\epsilon_b = \iint_b (E(x, y) - R(p(x, y), q(x, y)))^2 dx dy \quad (5)$$

这就是 SFS 问题应满足的基本约束关系, 称为亮度约束. 其中, 下标 b 表示亮度约束, $E(x, y)$ 是图象的实际辐照度, $R(p, q)$ 是从恢复的曲面出发, 由式(4)计算出来的辐照度. 将式(4)代入式(5), 即得到

$$\epsilon_b = \iint_b \left| E(x, y) - \left| \sum_{i=1}^{M_n} \Phi z_i + \gamma \right| \right|^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{A}_b \mathbf{z} - \mathbf{b}^T \mathbf{z} + c \quad (6)$$

其中, \mathbf{z} 是节点变量 z_i 的矢量表示形式, \mathbf{A}_b 是刚度矩阵, \mathbf{b} 是载荷矩阵.

2.3 分形约束

Szeliski 和 Teropoulos 给出了一个分形约束能量函数^[5], 形式如下

$$\epsilon_f = \frac{1}{2} \iint_f [W_1(z_x^2 + z_y^2) + W_2(z_{xx}^2 + 2z_{xy}^2 + z_{yy}^2)] dx dy \quad (7)$$

其中, (W_1, W_2) 均为权函数, 且在 0 到 1 之间取值, 下标 f 表示分形约束. 当 $(w_1, w_2) = (1, 0)$ 时, 该分形能量函数就是薄壳(membrane)能量函数

$$\epsilon_{f,m} = \frac{1}{2} \iint_f (z_x^2 + z_y^2) dx dy \quad (8)$$

当 $(W_1, W_2) = (0, 1)$ 时, 该分形能量函数则是薄板(thin plate)能量函数

$$\epsilon_{f,t} = \frac{1}{2} \iint_f (z_{xx}^2 + 2z_{xy}^2 + z_{yy}^2) dx dy \quad (9)$$

对 $z(x, y)$ 做 Fourier 变换: $F(W) = F\{z(x, y)\}$, 并

假定 $z(x, y)$ 是一个随机函数, 且具有能量为 ϵ 的 Boltzmann 分布, 则 $F(W)$ 就是一个服从能量 $\epsilon'(f)$ 的 Boltzmann 分布的随机函数, 而 $z(x, y)$ 的功率谱密度为

$$S_f(f) = \frac{1}{W_1 |2\pi f|^2 + W_2 |2\pi f|^4} \quad (10)$$

当 $(W_1, W_2) = (1, 0)$ 时, 则 $S_f(f) \propto |2\pi f|^{-2}$; 当 $(W_1, W_2) = (0, 1)$ 时, 则 $S_f(f) \propto |2\pi f|^{-4}$, 此时, 该功率谱实际上与分形布朗函数 $V_H(x, y)$ 的功率谱具有相同的形式, 即

$$S_f(f) \propto |f|^{-2H-N}$$

其中,

$$D = N + 1 - H$$

其中, H 是 Hurst 空间维数, N 是欧氏几何拓扑维数, D 是分形维数. 从上面分析可以看出, 由于满足式(10)的随机函数就是随机分形, 因此可以将该能量函数作为分形约束条件加入到 SFS 问题中.

2.4 基于分形的 SFS 算法

为加入分形约束条件, 这里重新定义新的能量函数形式

$$\epsilon = \epsilon_b + \lambda \epsilon_f \quad (11)$$

其中, ϵ_b 是由式(6)定义的原始亮度约束能量函数, λ 是拉格朗日常数, ϵ_f 是分形约束能量函数. 运用有限元方法离散式(8)可得

$$\epsilon_{f,m} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} |z_{i+1,j} - z_{i,j}|^2 + |z_{i,j+1} - z_{i,j}|^2 \quad (12)$$

离散式(9)可得

$$\epsilon_{f,t} = \frac{1}{2h^2} \sum_{(i,j)} [(z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j})^2 + 2(z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j} + z_{i,j})^2 + (z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1})^2] \quad (13)$$

合并式(12)和式(13)并采用矩阵形式表示, 可得

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{A}_f \mathbf{z} \quad (14)$$

根据式(6)和式(13), 最终的能量函数可以表示为

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{b} + c$$

其中, 刚度矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_b + \mu \mathbf{A}_f$.

当 $\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{b} = 0$ 时, 该能量函数取最小值, 则线性系统

$$\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{b}$$

的解就是 SFS 问题的一个最佳实现.

2.5 SFS 算法

(1) 初始化($k=0$).

将三角面片 T_i 的参考梯度值($p_{0i}^{(0)}, q_{0i}^{(0)}$) 设置为 $(0, 0)$, 进而构造系数矩阵 $A^{(0)} = A_g^{(0)} + \mu A_r$ 以及载荷列阵 $b^{(0)}$, 解 $A^{(0)}z^{(0)} = b^{(0)}$, 即可得到节点高度 $z^{(0)}$.

(2) 迭代次($k=1, 2, \dots$)

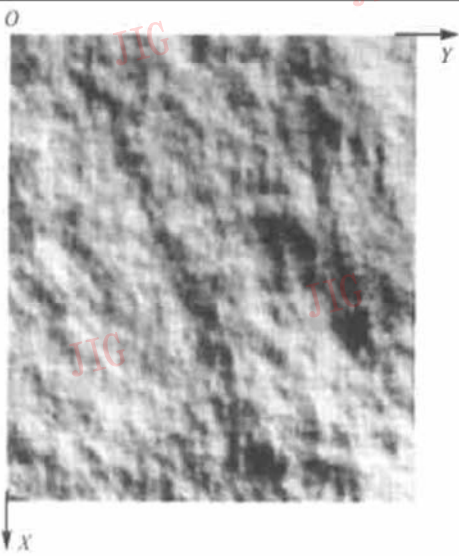
将三角片 T_i 的参考梯度值($p_{0i}^{(k)}, q_{0i}^{(k)}$) 设置为由节点高度 $z^{(k-1)}$ 决定的局部梯度值, 进而构造相应的系数矩阵 $A^{(k)} = A_g^{(k)} + \mu A_r$ 和载荷列阵 $b^{(k)}$, 解

$A^{(k)}z^{(k)} = b^{(k)}$, 得到新的节点高度 $z^{(k)}$.

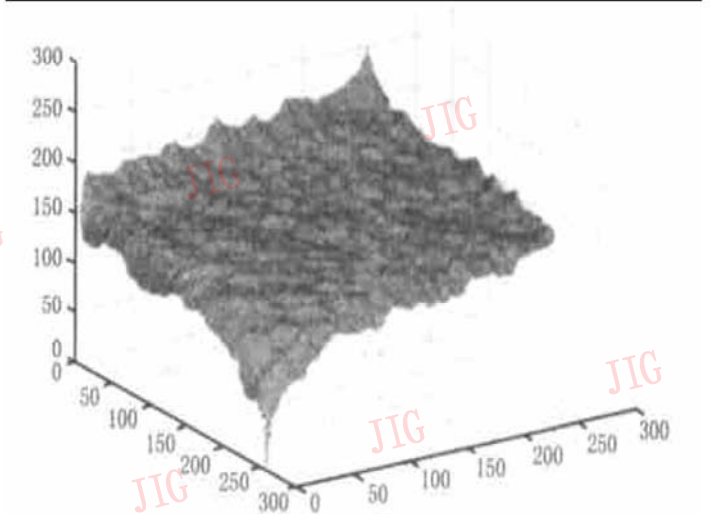
判断 $\|z^{(k)} - z^{(k-1)}\|$ 是否小于 ϵ , 其中, ϵ 为预先定义的极小值. 如果条件满足, 则得到解 $z^{(k)}$, 否则, 进行下一步迭代.

3 实验结果

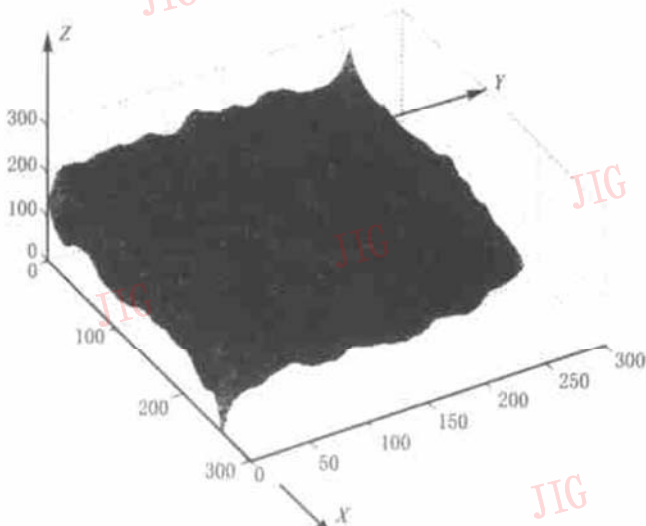
图 2 显示了利用上述算法, 在已知光源 $(\cos 20^\circ, \cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ 的情况下, 计算得到的三维地形.



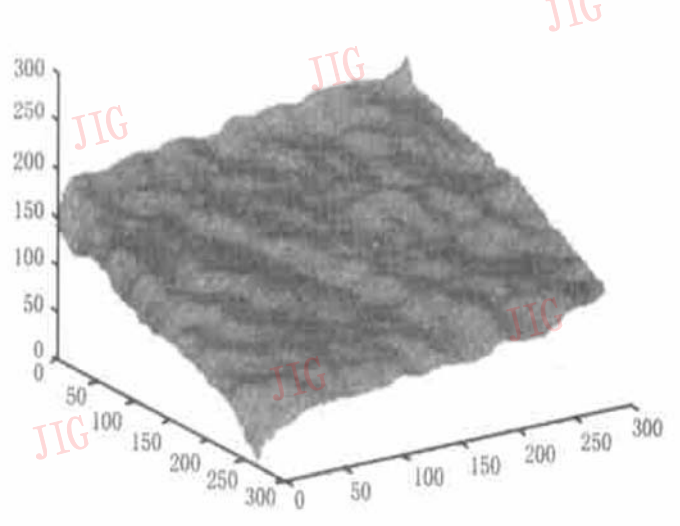
(a) 原始遥感图象



(b) 用 Horn 提出的传统方法获得的三维地形



(c) 第 1 次迭代获得的三维地形



(d) 经过两次迭代后获得的三维地形

图 2 几种不同方法恢复的三维地形

显然, 图 2(b) 恢复结果没有突出出地形的差异, 且边界畸变较大. 由图 2(d) 与图 2(c) 比较可见, 图 2(d) 恢复结果更接近真实景物.

4 结论

本文讨论了用于实际自然景物图象表面三维形

状恢复的基于分形的 SFS 算法. 实验结果表明, 该算法可直接计算物体三维表面高度, 而且不需要可积性约束以及初始边界条件. 同时, 由于该算法是采用有限元模型来逼近原始物体表面, 进而将反射图线性化, 从而将问题转化成求一个线性系数解的问题. 针对传统光滑性约束条件在解决此类 SFS 问题时, 会造成恢复结果过分平滑而失真的缺点, 为此, 引入了分形约束条件. 最后, 利用迭代算法得到待恢复表面三维形状的一个最佳实现.

实验结果显示, 与以待恢复表面是光滑表面假设为前提的传统 SFS 算法比较, 该算法对具有分形特性的自然景物图象的恢复更有实用性. 但是, 由于该约束条件仅适用于具有各项同性的分形表面 (isotropic), 而实际自然景物表面是各项异性的 (anisotropic), 因此, 在此研究的基础上来进一步构造适于描述自然景物的分形约束, 将是后续工作的研究重点. 另外, 该算法将反射图线性化, 从而克服了传统变分方法求解非线性系统的缺陷, 但由于这是以忽略 Taylor 展开中高阶项为前提的, 因此, 寻找鲁棒性更强, 速度更快的数值计算方法, 也是一个非常重要的问题. 与传统方法相同, 由于该算法也是假设物体表面是 Lambertian 反射模型, 而实际物体表面则是具有漫反射和镜面反射的混合反射模型, 因此, 建立合适的混合模型, 对重建物体表面真实形状将具有非常重要的理论和实际意义.

参 考 文 献

- 1 Horn B K P. Shape from shading: A method of obtaining the shape of a smooth opaque object from one view [D]. Ph. D. dissertation, Massachusetts Inst. of Technology, 1970.
- 2 Horn B K P, Brooks M J. The variational approach to shape from shading[J]. CVGIP, 1986, 33: 174~ 208.
- 3 Zhang R, Tsai P S, Cryer J E *et al.* Shape from shading: A survey [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(8): 690~ 705.
- 4 Pentland A P. Local Shading Analysis[J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(2): 170~187.

- 5 Szeliski R, Terzopoulos D. From splines to fractal [J]. Computer Graphics, 1989, 23(3): 51~ 60.
- 6 Lee K M, Kuo C C I. Shape from shading with a linear triangular element surface model [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(8): 815~ 822.



赵歆波 1970 年生, 1992 年获西北工业大学计算机科学与工程系学士学位, 1997 年获西北工业大学航空宇航制造工程专业硕士学位, 2001 年到英国 Surrey 大学进修访问, 现于西北工业大学攻读博士学位. 目前的主要研究兴趣在三维图象重建及计算机视觉方面.



张定华 1958 年生, 教授, 博士生导师, 美国机械工程师协会会员, 现任西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室主任. 主要研究方向为计算机辅助设计与制造、体视化技术、计算机层析成像技术、三维图象重建等众多领域. 发表论文 35 篇, 专著 2 部.



M. Petrou 1981 年获英国剑桥大学天文学博士学位, 现为英国 Surrey 大学电子学、计算机与数学学院教授, 研究领域为天文学、计算机视觉、纹理分析、马尔可夫随机场、特征提取、多分辨率优化、遥感、工业检测以及医学信号处理等. 发表论文 200 余篇, 著作 1 部.



赵荣椿 1960 年毕业于解放军军事工程学院, 1989~ 1990 年到英国 Surrey 大学进修访问, 现任西北工业大学信号处理研究所所长、博士生导师. 研究领域为信号、图象处理、模式识别与计算机视觉. 发表论文 90 余篇, 著作 5 部.